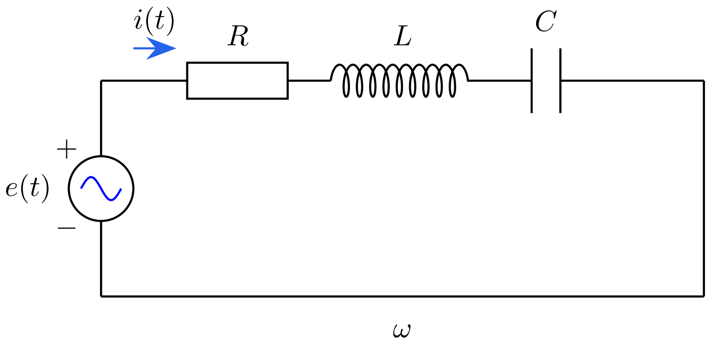
# 問題

## 問題 1

抵抗 $R$、自己インダクタンス $L$ のコイル、静電容量 $C$ のコンデンサを直列につなぎ、角周波数 $\omega$ の交流電圧

$$e(t) = E_0 \sin \omega t$$

を加える。ここで、$E_0$ は電圧の最大値である。定常状態において、次の問いに答えよ。ただし、素子はすべて理想的であり、抵抗以外でのエネルギー損失は無視できるものとする。




1. この直列回路全体の複素インピーダンス $Z$ と、その大きさ $|Z|$ を求めよ。
2. 回路を流れる電流の最大値 $I_0$ と、電流 $i(t)$ を $E_0, R, L, C, \omega$ を用いて表せ。
3. 抵抗、コイル、コンデンサにかかる電圧の最大値を、それぞれ $V_{R0}, V_{L0}, V_{C0}$ として求めよ。
4. 電流が最大となる角周波数 $\omega_0$ と、そのときの電流の最大値 $I_{0,\max}$ を求めよ。

[50 点]

# 解答・解説

## 問題1の解答

1. 抵抗、コイル、コンデンサの複素インピーダンスはそれぞれ

$$Z_R = R, \qquad Z_L = j\omega L, \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

である。直列回路ではインピーダンスがそのまま和になるので、

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

となる。したがって、その大きさは

$$|Z| \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

である。

ここで、実部 $R$ は抵抗による成分、虚部 $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ はコイルとコンデンサによるリアクタンス成分を表している。コイルは電流の変化を妨げ、コンデンサは電荷の蓄積によって位相をずらすため、両者は符号が反対の虚数成分として現れる。

2. 電圧の最大値を $E_0$ とすると、電流の最大値 $I_0$ はオームの法則を交流回路に拡張して

$$I_0 \frac{E_0}{|Z|}$$

である。よって、

$$I_0 \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

となる。

インピーダンスの偏角を $\phi$ とおくと、

$$\tan\phi \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

であるから、

$$\phi \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

と表せる。電圧 $e(t) = E_0 \sin\omega t$ を基準にすると、電流は

$$i(t) I_0 \sin(\omega t - \phi)$$

である。したがって、

$$i(t)\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin\left\{\omega t-\arctan\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right\}$$

となる。

$\omega L>\frac{1}{\omega C}$ のときは $\phi>0$ となり、回路は誘導性で、電流は電圧より遅れる。逆に $\omega L<\frac{1}{\omega C}$ のときは $\phi<0$ となり、回路は容量性で、電流は電圧より進む。

3. 直列回路では、抵抗、コイル、コンデンサを流れる電流の最大値はすべて同じ $I_0$ である。したがって、各素子の電圧の最大値は

$$V_{R0}=RI_0$$

$$V_{L0}=\omega LI_0$$

$$V_{C0}=\frac{1}{\omega C}I_0$$

である。これに

$$I_0\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

を代入すると、

$$V_{R0}\frac{RE_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$V_{L0}\frac{\omega LE_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$V_{C0}\frac{\frac{1}{\omega C}E_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\frac{E_0}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

となる。

ただし、交流回路では各電圧の位相が異なるため、一般に

$$E_0\neq V_{R0}+V_{L0}+V_{C0}$$

である。電圧の最大値は単純な足し算ではなく、位相を考慮して合成する必要がある。

4. 電流の最大値

$$I_0\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

が最大になるのは、分母が最小になるときである。$R$ は一定なので、

$$\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

が最小、すなわち

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

となればよい。したがって、

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

より、

$$\omega^2 LC = 1$$

となる。よって、電流が最大となる角周波数は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

である。

このとき、回路全体のインピーダンスは

$$Z = R$$

となり、虚数成分が消える。したがって、電流の最大値は

$$I_{0,\mathrm{max}} \frac{E_0}{R}$$

である。

この状態を共振という。共振時にはコイルのリアクタンス $\omega_0 L$ とコンデンサのリアクタンス $\frac{1}{\omega_0 C}$ が等しくなり、互いの位相効果が打ち消し合う。そのため、電源から見た回路は抵抗 $R$ だけの回路と同じになり、電流が最大になる。