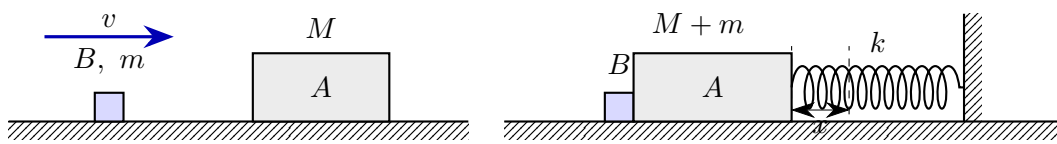


問題

問題 1

なめらかな水平面上に、質量 M の台車 A と質量 m の小物体 B がある。台車 A ははじめ静止しており、小物体 B は水平右向きに速さ v で進んでいる。小物体 B は台車 A に衝突し、その後、台車 A と一体となって運動する。

その後、一体となった物体は、水平面上に固定されたばね定数 k の軽いばねを縮め、最大圧縮時に一瞬静止した。水平面との摩擦、空気抵抗、ばねの質量は無視できるものとし、衝突は十分短い時間で起こるため、衝突中の外力による力積は無視できるものとする。



1. 衝突直後、台車 A と小物体 B が一体となって動く速さ V を、 m 、 M 、 v を用いて表せ。
2. ばねが最大に縮んだときの縮み x を、 m 、 M 、 v 、 k を用いて表せ。
3. はじめに小物体 B がもっていた運動エネルギーのうち、ばねの弾性エネルギーとして一時的に蓄えられる割合を求めよ。
4. この結果から、 M が m に比べて非常に大きい場合、ばねに蓄えられるエネルギーが小さくなる理由を、運動量保存の観点から説明せよ。

ただし、(4) では必要に応じて

$$M \gg m \Rightarrow M + m \simeq M$$

と近似してよい。したがって、

$$\frac{m}{M + m} \simeq \frac{m}{M}$$

として考えてよい。

[25 点]

解答・解説

問題 1 の解答

1. 衝突は短時間で起こり、その間の外力による力積は無視できるので、水平方向の運動量が保存される。

衝突前の全運動量は、小物体 B のみが運動しているから

$$mv$$

である。

衝突後、台車 A と小物体 B は一体となって速さ V で動くので、その全運動量は

$$(M + m)V$$

である。

よって、運動量保存則より

$$mv = (M + m)V$$

したがって、

$$V = \frac{m}{M + m}v$$

となる。

2. 衝突後からばねが最大に縮むまでの過程では、摩擦がなく、ばね以外にエネルギーを失う要因がないので、力学的エネルギーが保存される。

衝突直後の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2$$

であり、ばねが最大に縮んだ瞬間には物体は一瞬静止するので、そのときの弾性エネルギーは

$$\frac{1}{2}kx^2$$

である。

よって、

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

となる。ここに (1) の結果

$$V = \frac{m}{M + m}v$$

を代入すると、

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

したがって、

$$\frac{m^2v^2}{M+m} = kx^2$$

より、

$$x = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$$

となる。

3. はじめに小物体 B がもっていた運動エネルギー K_0 は

$$K_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

である。

一方、ばねに一時的に蓄えられる最大の弾性エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

である。(2)の結果を用いると、

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}\right)^2 = \frac{m^2v^2}{2(M+m)}$$

となる。

したがって、求める割合は

$$\frac{U}{K_0} = \frac{\frac{m^2v^2}{2(M+m)}}{\frac{1}{2}mv^2}$$

であり、整理して

$$\frac{U}{K_0} = \frac{m}{M+m}$$

となる。

4. (3)で求めた割合は

$$\frac{m}{M+m}$$

である。ここで $M \gg m$ のとき

$$M+m \simeq M$$

と近似できるから、

$$\frac{m}{M+m} \simeq \frac{m}{M}$$

となり、これは非常に小さい値である。

その理由を運動量保存の観点から説明する。衝突前の運動量は mv であり、衝突後もこれが保存されるので、

$$(M + m)V = mv$$

である。したがって、

$$V = \frac{m}{M + m}v$$

となり、 M が大きいほど衝突後の速さ V は小さくなる。

ばねに蓄えられるエネルギーは、衝突後の一体となった物体の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2$$

に等しい。運動エネルギーは速さの二乗に比例するので、保存される運動量が同じでも、質量が大きいほど速さが小さくなり、その結果、ばねに移るエネルギーも小さくなる。

つまり、重い台車と一体化すると、運動量保存により衝突後の速さが大きく減少するため、ばねに蓄えられるエネルギーの割合も小さくなるのである。