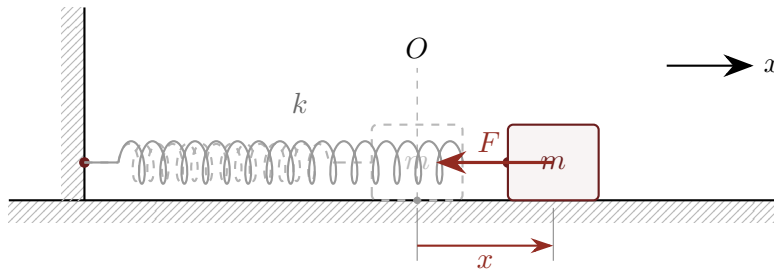


問題

問題 1

なめらかな水平面上に、質量 m の小物体が置かれている。小物体は、ばね定数 k の軽いばねにつながれており、ばねの他端は左側の壁に固定されている。

小物体の中心が O にあるとき、ばねは自然長である。いま、小物体を O から右向きに距離 x だけ引きのばして静かに手を離す。右向きを正の向きとする。ただし、床との摩擦、空気抵抗、ばねの質量は無視できるものとする。



1. このとき、小物体にはたらくばねの力を、向きも含めて文字式で答えよ。
2. 小物体の加速度を、向きも含めて文字式で答えよ。
3. 小物体を O から右向きに距離 A だけ引きのばして静かに手を離したとする。小物体が初めて O を通過するときの速さを、文字式で答えよ。

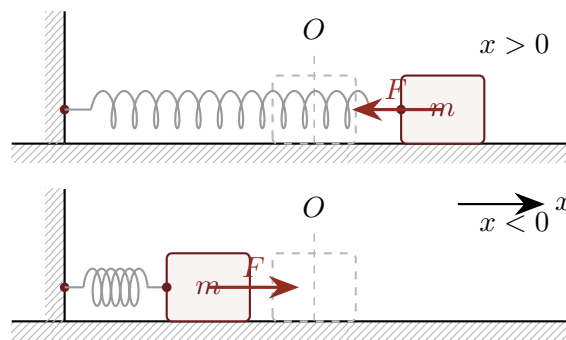
[20 点]

解答・解説

問題 1 の解答

右向きを正とする。ばねは自然長の位置 O から右向きに距離 x だけ伸びているので、小物体には自然長へ戻ろうとする左向きの力がはたらく。

ばねの運動で最も重要なのは、力が「ずれた向き」ではなく、「もとの位置へ戻す向き」にはたらくことである。このように、物体を自然長の位置へ戻そうとする力を復元力という。



- フックの法則より、ばねの力は変位に比例し、その向きは変位と反対向きである。

右向きを正にとったとき、自然長の位置 O から右向きに x だけずれると、ばねは左向きに小物体を引き戻す。したがって、ばねの力は

$$F = -kx$$

である。

よって、**ばねの力は左向きで、大きさは kx** である。

- 小物体には水平方向にばねの力だけがはたらくから、運動方程式

$$ma = F$$

に $F = -kx$ を代入して、

$$ma = -kx$$

となる。

よって、

$$a = -\frac{k}{m}x$$

である。

したがって、**加速度は左向きで、大きさは $\frac{k}{m}x$** である。

3. 最初に小物体を O から右向きに距離 A だけ引きのばして静かに手を離すので、初めの速さは 0 である。また、このときばねに蓄えられている弾性エネルギーは

$$\frac{1}{2}kA^2$$

である。

小物体が初めて O を通過するとき、ばねは自然長であるから弾性エネルギーは 0 となり、その分だけ運動エネルギーが増える。速さを v とすると、力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

である。

これを整理すると、

$$kA^2 = mv^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m}A^2$$

となる。速さは正の量なので、

$$v = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。

よって、**小物体が初めて O を通過するときの速さは $A\sqrt{\frac{k}{m}}$ である。**

まとめ

ばねは、物体をただ押したり引いたりするだけの道具ではない。自然長からのずれを打ち消す向きに力を生み出す。これが復元力である。

右向きを正にとると、自然長から右へ x だけずれたとき、ばねの力は

$$F = -kx$$

と表される。この負号こそが、ばねの本質である。すなわち、ばねの力は常に変位と反対向きにはたらく。

さらに、ばねを引きのばしたときには、弾性エネルギー

$$\frac{1}{2}kx^2$$

が蓄えられる。物体が自然長の位置 O に戻ると、このエネルギーは運動エネルギーへと変わる。

つまり、ばねの運動は

$$\text{位置のずれ} \rightarrow \text{復元力} \rightarrow \text{運動}$$

という流れで理解できる。単振動は、この復元力とエネルギー変換がくり返される運動である。