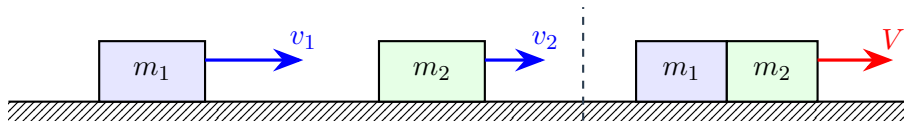


問題

問題 1

なめらかな水平面上を、質量 m_1 の物体 A と質量 m_2 の物体 B が同一直線上を運動している。物体 A は速さ v_1 、物体 B は速さ v_2 で同じ向きに進んでおり、 $v_1 > v_2$ とする。A が B に追いついて衝突した後、2つの物体は一体となって速さ V で運動した。

水平面からの摩擦は無視でき、衝突の前後で水平方向の外力による力積は無視できるものとする。



1. 衝突後に一体となって進む速さ V を、 m_1, m_2, v_1, v_2 を用いて表せ。
2. 衝突前の運動エネルギーを K_{before} 、衝突後の運動エネルギーを K_{after} とする。失われた運動エネルギー $\Delta K = K_{\text{before}} - K_{\text{after}}$ を、 m_1, m_2, v_1, v_2 を用いて表せ。
3. ΔK が $v_1 - v_2$ のみに依存する形で表されることの物理的意味を説明せよ。

[20 点]

解答・解説

問題 1 の解答

1. 衝突後の速さ V を求める。

水平方向には外力による力積が無視できるので、衝突の前後で水平方向の運動量が保存される。衝突前の全運動量は

$$m_1v_1 + m_2v_2$$

であり、衝突後は 2 つの物体が一体となって速さ V で進むので、全運動量は

$$(m_1 + m_2)V$$

である。

よって、運動量保存則より

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V$$

となる。したがって、

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

である。

この式は、衝突後の速さが、それぞれの速さを質量で重みづけした平均になっていることを表している。質量の大きい物体ほど、衝突後の速さへの影響が大きい。

2. 失われた運動エネルギー ΔK を求める。

衝突前の運動エネルギーは

$$K_{\text{before}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

である。

衝突後は 2 つの物体が一体となって速さ V で運動するので、

$$K_{\text{after}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

である。

ここに

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

を代入すると、

$$K_{\text{after}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

より,

$$K_{\text{after}} = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

となる。

したがって、失われた運動エネルギーは

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

である。

これを整理する。

$$\Delta K = \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

分子を展開すると,

$$(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2$$

また,

$$(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 = m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2$$

である。よって,

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)}$$

となる。したがって,

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

である。

3. 物理的意味を説明する。

最終結果

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

より、失われる運動エネルギーは、衝突前の2物体の相対速度 $v_1 - v_2$ の2乗に比例することがわかる。

つまり、2つの物体が同じ速さで動いている場合には $v_1 - v_2 = 0$ となり、そもそも衝突は起こらず、失われる運動エネルギーも

$$\Delta K = 0$$

である。

一方、 $v_1 - v_2$ が大きいほど、衝突によって物体どうしの相対運動が大きく失われる。その失われた分の運動エネルギーは、熱、音、変形などの内部エネルギーに変化する。したがって、

完全非弾性衝突では、運動量は保存されるが、運動エネルギーは一般には保存されない。