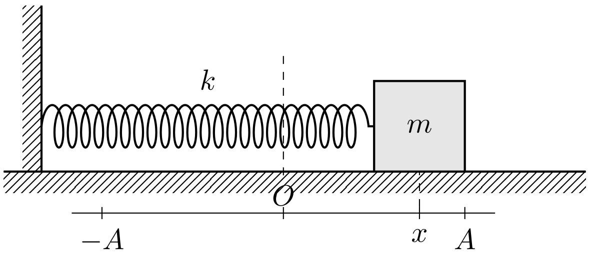
問題

問題1

図のように、水平でなめらかな床の上に質量 m の小物体を置き、ばね定数 k の軽いばねにつなぐ。ばねが自然長のときの小物体の位置を O とし、そこからの変位を x とする。小物体を右向きに A だけ引いて静かにはなすと、小物体は水平面上で単振動を行う。

摩擦や空気抵抗は無視できるものとし、力学的エネルギー保存を用いて、次の問いに答えよ。[20点]



1. 小物体が変位 x の位置にあるとき、ばねの弾性力による位置エネルギー U を k, x を用いて表せ。
2. 小物体を $x = A$ の位置から静かにはなしたときの力学的エネルギー E を求めよ。
3. 小物体が変位 x の位置を通過するときの速さ v を、m, k, A, x を用いて表せ。
4. 小物体の速さが最大となる位置と、その最大値 $v_{\max}$ を求めよ。
5. 運動エネルギーと弾性力による位置エネルギーが等しくなる位置 x を求めよ。

解答・解説

問題1の解答

1. ばねの弾性力による位置エネルギーは、自然長の位置を基準にして

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

である。

2. 小物体を $x = A$ の位置から静かにはなすので、はじめの速さは 0 である。したがって、はじめの力学的エネルギーは弾性力による位置エネルギーだけであり、

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

となる。

3. 変位 x の位置での運動エネルギーを K とすると、

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

である。また、その位置での弾性力による位置エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

である。

力学的エネルギー保存より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

となる。これを整理すると、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

だから、

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

となる。速さ v は正の値で表すので、

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

である。

4. 速さが最大となるのは、位置エネルギーが最小となる位置、すなわち

$$x = 0$$

のときである。

(3) の式に $x = 0$ を代入すると、

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}A^2} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。

5. 運動エネルギーと位置エネルギーが等しいとき、

$$K = U$$

である。

全エネルギーは

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

なので、$K = U$ のときは

$$U = \frac{1}{4}kA^2$$

となる。

一方、

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

であるから、

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

となる。両辺を整理すると、

$$2x^2 = A^2$$

すなわち

$$x^2 = \frac{A^2}{2}$$

である。したがって、

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

となる。

考え方の整理

単振動では、ばねにつながれた小物体の

$$\text{運動エネルギー} + \text{弾性力による位置エネルギー}$$

が一定に保たれる。

この問題では、はじめに $x = A$ で静かにはなしているので、はじめのエネルギーは

$$\frac{1}{2}kA^2$$

だけである。

その後、変位 x の位置では

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

が成り立つ。この式から、速さやエネルギーの分配を考えることができる。

特に、

- 速さが最大なのは、位置エネルギーが最小の $x = 0$ のとき
- 運動エネルギーと位置エネルギーが等しいのは、全エネルギーを半分ずつ分けるとき

であることが重要である。